新浪教育联合跨考教育合办第二届
“十万人大联考”数学（三）试卷（答案）

一、选择题

(1)**【答案】** (C)

【分析】 用反证法证明$\{x_n+z_n\}$必无界.设$\{x_n+z_n\}$有界,则存在$M>0$与$M_1>0$,对一切n,$|x_n+z_n|\leqslant M$与$|z_n|\leqslant M_1$,有

$$|x_n|=|x_n+z_n-z_n|\leqslant|x_n+z_n|+|z_n|\leqslant M+M_1,$$

从而$\{x_n\}$有界,与题设矛盾.故应选(C).

【注】 有界数列与有界数列之和或差,或积,均为有界,但其商未必有界;有界数列与无界数列之和或差必无界;有界数列与无界数列之积或商未必有界,也未必无界;无界数列与无界数列的和、差、积或商均未必无界也未必有界,应具体分析.

(2)**【答案】** (D)

【分析】 当$x\neq0$时,$f(x)=\lim\limits_{y\to x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{x-y}}=\lim\limits_{y\to x}\left(1+\dfrac{x-y}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}\cdot\frac{1}{y}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.所以$x=0$为$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$的无穷间断点.故应选(D).

(3)**【答案】** (C)

【分析】 具体计算出$F(x)$如下.

当$x\leqslant0$时,$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-1}$;

当$x>0$,$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}t^2\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-1}+\dfrac{x^3}{3}$.

再讨论(A),(B),(C),(D)哪个选项正确.

$\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=1-\mathrm{e}^{-1}$,$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=1-\mathrm{e}^{-1}$,$F(0)=1-\mathrm{e}^{-1}$,所以(A),(B)都不正确.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-1}-(1-\mathrm{e}^{-1})}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{-1}+\dfrac{x^3}{3}-(1-\mathrm{e}^{-1})}{x}=0,$$

即$F(x)$在$x=0$处左、右导数不相等,故$F(x)$在$x=0$处不可导,故应选(C).

【注】 实际上有下述结论:设$f(x)$在$[a,b]$上除点$x_0\in(a,b)$外均连续,而在x_0处$f(x)$有跳跃间断点:$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$,$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$.

记$F(x)=\int_{c}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,不论$c$是否为$x_0$,均有结论:

①$F(x)$在$[a,b]$上连续;

②$F'(x)=f(x)$,当$x\in[a,b]$,但$x\neq x_0$;

③$F'_-(x_0)=f(x_0^-)$,$F'_+(x_0)=f(x_0^+)$.

将来在做选择题时可直接套用上述结论.

(4)**【答案】** (B)

【分析】 一般有下述结论:

① 如果y_1,y_2,y_3是二阶线性非齐次方程的3个解,则当且仅当$a+b+c=1$时,它们的线性组合$ay_1+by_2+cy_3$也是该方程的解.

② 如果进一步设y_1,y_2,y_3是该方程的3个线性无关的解,并且a,b,c中含有2个任意常数,则当且

仅当 $a+b+c=1$ 时,它们的线性组合 $ay_1+by_2+cy_3$ 是该方程的通解.

③ 设同 ①,则当且仅当 $a+b+c=0$ 时,它们的线性组合 $ay_1+by_2+cy_3$ 是该方程对应的齐次方程的解.

④ 设同 ②,则当且仅当 $a+b+c=0$ 时,它们的线性组合 $ay_1+by_2+cy_3$ 是该方程对应的齐次方程的通解.

本题选项(B) 满足上述条件 ④,故应选(B).

(5)**【答案】** (D)

【分析】 因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

两边取行列式,显然有 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,(A) 正确.

由
$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$
移项,提公因子得
$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B},$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E},$$
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}.$$
故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 都是可逆阵,且互为逆矩阵,从而知方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,(C) 正确. $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 不可逆是错误的,(D) 不正确. 又因
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$
故
$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$
从而有 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则$(\boldsymbol{AB})^{-1}=(\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$,故(B) 正确.

则(A),(B),(C) 是正确的,故应选(D).

【注】 一般$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$. 但在条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 时,因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,故有$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$.

(6)**【答案】** (B)

【分析】 $\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1-\mu,\lambda_2-\mu,\lambda_3-\mu$,

且满足
$$a-\mu\geqslant\lambda_1-\mu\geqslant\lambda_2-\mu\geqslant\lambda_3-\mu\geqslant b-\mu.$$
当 $b-\mu>0$ 即 $\mu<b$ 时,$\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 的全部特征值大于等于正值,故 $\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵,故应选(B). 而(A) 中 $\mu>b$,即 $b-\mu<0$,$\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 的全部特征值大于等于负值,不能确定$\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 的正定性. (C) 中 $\mu>a$,即 $a-\mu<0$,$\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 的全部特征值小于等于负值,不能确定 $\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 的正定性. (D) 中 $\mu<a$,即 $\mu-a<0$,$\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 的全部特征值小于等于正值,不能确定 $\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 的正定性.

(7)**【答案】** (B)

【分析】 随机变量 X 的分布律的递推关系式可化简为
$$P\{X=n\}=\frac{1}{3^{n-1}}\cdot P\{X=1\}(n=1,2,\cdots). \qquad (*)$$
由(*)式可知随机变量 X 的分布律依赖于 $P\{X=1\}$,令 $P\{X=1\}=C$,利用分布律的归一性,得
$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}C,$$
解得 $C=\dfrac{2}{3}$,即随机变量 X 的分布律为
$$P\{X=n\}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}(n=1,2,\cdots).$$
即 $X\sim G\left(\dfrac{2}{3}\right)$,所以 $EX=\dfrac{1}{p}=\dfrac{3}{2}$.

(8)**【答案】** (D)

【分析】 总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$,则 $X_1+X_2+X_3+X_4\sim N(0,4\sigma^2)$,标准化可得
$$\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{2\sigma}\sim N(0,1).$$
因为 $\sum\limits_{i=5}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-4)$,下面将统计量化为 t 分布的标准形式.

$$T=\frac{2(X_1+X_2+\cdots+X_4)}{\sqrt{X_5^2+X_6^2+\cdots+X_n^2}}=\frac{\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_4}{2\sigma}}{\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=5}^{n}X_i^2}{\dfrac{\sigma^2}{16}}}}\sim t(16),$$

于是$\sum\limits_{i=5}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(16)$,即$n=20$.

二、填空题

(9)**【答案】** -2π

【分析】 将$x=0$代入$x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{d}t$中,得$y=1$.再将所给方程两边对$x$求导,得

$$1=\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]\cdot(y'-1).$$

于是
$$y'=\csc^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]+1,$$

$$y''=-2\csc^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]\cot\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]\cdot\frac{\pi}{4}(y'-1).$$

将$x=0,y=1$代入,得$y'|_{x=0}=3,y''|_{x=0}=-2\pi$.

(10)**【答案】** $2\sqrt{\pi}$

【分析】 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-2\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right)$

$$\overset{u=\sqrt{x}}{=\!=\!=}-2\left(0-2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)=4\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=2\sqrt{\pi}.$$

(11)**【答案】** $y=\frac{1}{3}x-1$

【分析】 **法一** 由极限与无穷小的关系,有

$$\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2+\alpha,\lim_{x\to0}\alpha=0.$$

于是
$$f(x)=\frac{(2+\alpha)(x-\sin x)}{x^2}-1,$$

由于

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}=0,\lim_{x\to0}(2+\alpha)=2,$$

所以
$$\lim_{x\to0}f(x)=-1.$$

由于$f(x)$在$x=0$处连续,所以$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(2+\alpha)(x-\sin x)}{x^3}=\frac{1}{3}\left(因\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}\right).$$

由点斜式知,曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$的切线方程为$y-f(0)=f'(0)(x-0)$,

即$y=\frac{1}{3}x-1$.

法二 将$\sin x$按皮亚诺余项泰勒公式展至$n=3$,有

$$x-\sin x=x-\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]=\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

代入原给极限式,有

$$2=\lim_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{\frac{1}{6}x+o(x)}.$$

可见$\lim\limits_{x\to0}[f(x)+1]=0$,即有$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$.于是

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)+1}{\frac{1}{6}x+o(x)}\cdot\frac{\frac{1}{6}x+o(x)}{x}\right)$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

以下同法一.

(12)【答案】 $x=-\dfrac{y^2}{2(y+1)}+\dfrac{5}{y+1}$

【分析】 将方程改写为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{x}{y+1}=-\dfrac{y}{y+1}$,将 x 看成函数,此为 x 对 y 的一阶线性方程,代入通解公式,得

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y}\left(-\int\frac{y}{y+1}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y+1}\left(-\frac{y^2}{2}+C\right)=-\frac{y^2}{2(y+1)}+\frac{C}{y+1}.$$

再由初始条件:$x=1$ 时,$y=2$,得 $C=5$,所以 $x=-\dfrac{y^2}{2(y+1)}+\dfrac{5}{y+1}$.

(13)【答案】 $1-2^n$

【分析】 $f(x)\cdot g(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1-x)=1-x^n$.

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}[1,0,1]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[1,0,1]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=2.$$

故 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$.

$$|f(\boldsymbol{A})\cdot g(\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=\left|\boldsymbol{E}-2^{n-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&1&0\\-2^{n-1}&0&1-2^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(1-2^{n-1})^2-2^{2(n-1)}=1-2^n.$$

(14)【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【分析】 $P\{X^2+Y^2\leqslant1\}=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 4r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{1}{2}$.

三、解答题

(15)【解】 由积分部分分式

$$\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}{(x-1)(x^3-1)}=\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.\qquad(*)$$

若 $A\neq0$,则积分之后会出现对数函数;若 $C\neq0$,也会出现对数函数.因此 $A=0$ 且$C=0$.将它们代入(*)式后,通分并令两边分子相等,得

$$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=B(x^2+x+1)+D(x-1)^2=(B+D)x^2+(B-2D)x+(B+D).$$

所以 $\alpha=0,\beta=B+D,\gamma=B-2D,\delta=B+D$.从而推得 $\alpha=0,\beta=\delta,\gamma$ 可以任意.

当满足上述条件时,被积函数为$\dfrac{\beta x^2+\gamma x+\beta}{(x-1)(x^3-1)}$,则

$$\int\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}{(x-1)(x^3-1)}\mathrm{d}x=\int\frac{\beta x^2+\gamma x+\beta}{(x-1)(x^3-1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}(2\beta+\gamma)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+\frac{1}{3}(\beta-\gamma)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$=-\frac{2\beta+\gamma}{3(x-1)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}(\beta-\gamma)\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(16)【解】 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}{\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{u\to0^+}\frac{\mathrm{e}-(1+u)^{\frac{1}{u}}}{u}$$

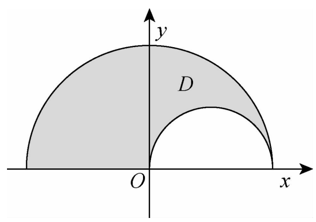
$$=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{u\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{u}\ln(1+u)}-\mathrm{e}}{u} = -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2}\lim_{u\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{u}\ln(1+u)-1}-1}{u}$$

$$\xlongequal{\text{等价无穷小替换}} -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}\ln(1+u)-1}{u} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{u\to0^+}\frac{\ln(1+u)-u}{u^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{1+u}-1}{2u} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{u\to0^+}\frac{-u}{2u(1+u)} = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

【注】 应随时注意化简：将幂指数函数化为指数函数，能求出极限(其极限值不为零的因子)的，可利用乘积极限先求出之，作变量代换将形式化简，以及用等价无穷小代换等. 不要一上来就用洛必达法则.

(17)**【解】** D 如图所示，由极坐标，则



将 $x^2+y^2=4$ 化为 $r=2(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，

$(x-1)^2+y^2=1$ 化为 $r=2\cos\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\iint\limits_D(xy+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}(r^2\sin\theta\cos\theta+r^2\sin^2\theta)r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\sin\theta\cos\theta+r^2\sin^2\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4(1-\cos^4\theta)(\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}4(\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi}(\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=0+8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\cos\theta-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\left(\cos^6\frac{\pi}{2}-1\right)-4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{15}{8}\pi-\frac{2}{3}.$$

【注】 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$ 用到华里士公式，请考生切记此公式.

(18)**【解】** 将 $z+\ln z-\int_y^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=1$ 两边对 x 求导，有

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}-\mathrm{e}^{-x^2}=0, \text{即} \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{1+z}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

类似地，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{1+z}\mathrm{e}^{-y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{-x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{1+z}\right)=\mathrm{e}^{-x^2}\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2}=-\frac{z}{(1+z)^3}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}. \quad (*)$$

为计算当 $x=0,y=0$ 时，上述偏导数的值，应先计算出 $x=0,y=0$ 时，z 的值.

由 $z+\ln z-\int_y^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=1$，将 $x=0,y=0$ 代入，得 $z+\ln z-1=0$. 令

$$f(z)=z+\ln z-1=0,$$

则

$$\lim_{z\to0^+}f(z)=-\infty, \lim_{z\to+\infty}f(z)=+\infty, f'(z)=1+\frac{1}{z}>0,$$

所以 $f(z)$ 有唯一零点. 易见 $f(1)=0$，所以当 $x=0,y=0$ 时，$z=1$. 代入(*)式，得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{8}.$$

(19)【解】 利润函数

$$L(q)=pq-C(q)=(\beta-\alpha q)q-(aq^2+bq+c)=-(a+\alpha)q^2+(\beta-b)q-c.$$
$$L'(q)=-2(a+\alpha)q+(\beta-b).$$

令 $L'(q)=0$,得唯一驻点 $$q_0=\frac{\beta-b}{2(a+\alpha)}.$$

由于 $L''(q)=-2(a+\alpha)<0$,故当 $q=q_0$ 时,$L(q)$ 为极大值,同时也为最大值,所以

$$L_{\max}(q)=-(a+\alpha)q_0^2+(\beta-b)q_0-c=\frac{(\beta-b)^2}{4(a+\alpha)}-c.$$

【注】 产量太少时,最大利润也可能为负,原因是要支付固定成本.

(20)【解】 齐次线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

只有零解,故其系数矩阵(记为 $\boldsymbol{A}$)的秩 $r(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=n$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆方阵.

齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n)x_{n-1}+(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)x_n=\boldsymbol{0} \tag{$**$}$$

的系数矩阵(记为 $\boldsymbol{B}$)和 $\boldsymbol{A}$ 有如下关系:

$$[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{bmatrix},$$

记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$.

因 $\boldsymbol{A}$ 可逆,故有 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})$,而

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}.$$

当 $n=2k+1$ 时,$|\boldsymbol{C}|=2\neq0$,故 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=n$,方程组($**$)只有零解.

当 $n=2k$ 时,$|\boldsymbol{C}|=0$,故 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})<n$,方程组($**$)有非零解.

当 $n=2k$ 时,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$,$\boldsymbol{A}$ 可逆. 故 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 是同解的方程组,故只需求解线性齐次方程组 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 即可.

对 $\boldsymbol{C}$ 作初等行变换,将第 i 行的 (-1) 倍加到第 $i+1$ 行($i=1,2,\cdots,n-1$).

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{bmatrix}_{2k\times2k}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}_{2k\times2k}$$

知 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=2k-1$,$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有一个非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 组成基础解系,且 $\boldsymbol{\xi}=[1,-1,1,\cdots,1,-1]^{\mathrm{T}}$,故方程组($**$)的通解为 $c\boldsymbol{\xi}=c[1,-1,1,\cdots,1,-1]^{\mathrm{T}}$,其中 c 是任意常数.

或由 $\boldsymbol{C}$ 知,$\boldsymbol{C}$ 中有 $n-1$ 阶子式 $C_{n-1,n-1}\neq0$,故 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=2k-1$,$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有通解 $k\boldsymbol{\xi}$.

由观察,因 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots-(\boldsymbol{\alpha}_{2k}+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$,则通解为 $k[1,-1,1,-1,\cdots,-1]^{\mathrm{T}}$,其中 k 是任意常数.

(21)【解】 (Ⅰ)由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的秩和特征值.显然 $r(\boldsymbol{B})=1$,$\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\sum\limits_{i=1}^{3}b_{ii}=1+4+9$,得 $\lambda_3=14$.故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=14$.

(Ⅱ)$\lambda_1=\lambda_2=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,对应的线性无关特征向量最多有两个,由题设知 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_3=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$ 线性无关(取 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 的极大线性无关组),故取 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_3$ 为 $\lambda=0$ 的特征向量,因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵,将 $\lambda_3=14$ 对应的特征向量设为 $\boldsymbol{\eta}_3=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\eta}_3$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 正交,则有 $\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_3=0,\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_3=0$.

即有

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\2x_2+x_3=0.\end{cases}$$

基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_3=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$,即是 $\lambda_3=14$ 对应的特征向量.

(Ⅲ)**法一** 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&14\end{bmatrix}.$$

其中 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}5&1&-2\\-2&2&2\\1&-1&2\end{bmatrix}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&14\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&1&-2\\-2&2&2\\1&-1&2\end{bmatrix}\\&=\frac{14}{6}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&-1&2\end{bmatrix}=\frac{7}{3}\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

法二 先求出与 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_3$ 正交的向量 $\boldsymbol{\eta}_3$,因与 $\boldsymbol{\eta}_3$ 正交的非零向量均是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=0$ 的特征向量,取一个与 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_3=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$ 均正交的向量为 $\boldsymbol{\eta}_2$,可得 $\boldsymbol{\eta}_2=[1,-1,-1]^{\mathrm{T}}$.将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 单位化,并合并成正交阵,得

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1^{\circ},\boldsymbol{\eta}_2^{\circ},\boldsymbol{\eta}_3^{\circ}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}\\&=14\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}=14\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{2}{6}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{2}{6}\\\frac{2}{6}&-\frac{2}{6}&\frac{4}{6}\end{bmatrix}=\frac{7}{3}\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【注】 法二用正交阵求 $\boldsymbol{A}$ 比用可逆阵求简单,且这里还没有利用施密特正交化方法.

(22)【解】 (Ⅰ)X,Y 的可能取值分别为 1,2,3. 由乘法公式得

$$p_{11}=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1\mid X=1)=\frac{1}{4}\times 0=0;$$

$$p_{12}=P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2\mid X=1)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}.$$

同理可得

$p_{13}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},p_{21}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},p_{22}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},p_{23}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$

$p_{31}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},p_{32}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6},p_{33}=\frac{1}{4}\times 0=0.$

所以(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

(Ⅱ)由协方差公式可得

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY.$$

根据(X,Y)的分布律得:$E(XY)=\frac{23}{6},EX=EY=2$,所以

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{23}{6}-4=-\frac{1}{6}.$$

(23)【分析】 本题考查了多维随机变量的概率分布和数字特征的问题.

【解】 (Ⅰ)(X,Y)在区域D上服从均匀分布,其联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若区域D表示为$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}\cup\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,x-1\leqslant y\leqslant 1\}$,则$X$的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x 1\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \int_{x-1}^1 1\mathrm{d}y, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若区域D表示为$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,y\leqslant x\leqslant y+1\}$,则$Y$的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^{y+1} 1\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ)因为$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,则$X$与$Y$不相互独立.