注意:
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点________
________考场______号
归属区县________
(领准考证的区县)

(密 封 线 内 不 要 答 题)

绝密★启用前

新浪教育联合跨考教育合办第二届
“十万人大联考”数学(三)试卷

(科目代码:303)

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	32	24	94	150
得分	______分	______分	______分	______分

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均无界,$\{z_n\}$ 有界,则 ( )

(A) $\{x_n+y_n\}$ 必无界. (B) $\{x_ny_n\}$ 必无界.

(C) $\{x_n+z_n\}$ 必无界. (D) $\{x_nz_n\}$ 必无界.

(2) 设 $F(x,y)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{x-y}}$,其中 $x\neq y$,且 $xy>0$. 又设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{y\to x}F(x,y), & x\neq 0,\\ \mathrm{e}, & x=0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的 ( )

(A) 连续点. (B) 可去间断点. (C) 跳跃间断点. (D) 无穷间断点.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$ $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处 ( )

(A) 极限不存在. (B) 极限存在但不连续.

(C) 连续但不可导. (D) 可导.

(4) 设 $p(x),q(x),f(x)$ 均是 x 的连续函数,$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的 3 个线性无关的解,C_1 与 C_2 是两个任意常数,则该非齐次方程对应的齐次方程的通解是 ( )

(A) $C_1y_1+(C_2+C_1)y_2+(1-C_2)y_3$.

(B) $(C_1-C_2)y_1+(C_2-1)y_2+(1-C_1)y_3$.

(C) $(C_1+C_2)y_1+(C_1-C_2)y_2-(1+C_1)y_3$.

(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵,满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 则下列关系中不正确的是 ( )

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. (B) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$.

(C) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. (D) $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 不可逆.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值,且满足 $a\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3\geqslant b$,若 $\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 是正定阵,则参数 μ 应满足 ( )

(A) $\mu>b$. (B) $\mu<b$. (C) $\mu>a$. (D) $\mu<a$.

(7) 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=n+1\}=\dfrac{1}{3}\cdot P\{X=n\}(n=1,2,\cdots)$,则 $EX=$ ( )

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) 3.

(8) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本,统计量 $T=$

$\dfrac{2(X_1+X_2+\cdots+X_4)}{\sqrt{X_5^2+X_6^2+\cdots+X_n^2}}$ 服从 t 分布，则样本容量 n 的值为 ( )

(A)8. (B)12. (C)16. (D)20.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt$ 所确定，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________.

(10) $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}}{\sqrt{x^3}}dx=$ ________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为________.

(12) 微分方程 $(x+y)dy+(y+1)dx=0$ 满足 $y(1)=2$ 的特解是________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,0,1]^T$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$，$g(x)=1-x$，则 $|f(\boldsymbol{A})\cdot g(\boldsymbol{A})|=$ ________.

(14) 设随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $P\{X^2+Y^2\leqslant1\}=$ ________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

不定积分 $\int\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}{(x-1)(x^3-1)}dx$ 的结果中不含对数函数，求常数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 应满足的充要条件，并计算此不定积分.

(16)（本题满分 10 分）

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right]$.

(17)（本题满分 10 分）

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant4 \text{ 且 } (x-1)^2+y^2\geqslant1, y\geqslant0\}$，计算 $\iint\limits_D(xy+y^2)d\sigma$.

密 封 线 内 不 要 答 题

(18)(本题满分 10 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}\mathrm{d}t=1$ 确定的函数，计算 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

(19)(本题满分 10 分)某产品的成本函数为 $C(q)=aq^2+bq+c$,需求函数为 $q=\dfrac{1}{\alpha}(\beta-p)$,其中 $c>0$ 为固定成本,a,b,α,β 均为正常数,$\beta>b$,q 为需求量(需求量等于产量),p 为该产品的单价,求产量 q 为何值时,利润最大?

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 个 n 维列向量,已知齐次线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\mathbf{0} \qquad (*)$$

只有零解,问齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n)x_{n-1}+(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)x_n=\mathbf{0} \qquad (**)$$

是否有非零解?若没有,说明理由;若有,求出方程组(* *)的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称阵,$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=[2,2,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_3=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_4=[5,-1,-3]^{\mathrm{T}}$,都是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征向量,求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_3 的特征向量;

(Ⅲ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

一个口袋中有四个球,上面分别标有数字 1,2,2,3,从口袋中任取一球后,不放回袋中,再从中任取一球.依次用 X,Y 表示第一次、第二次取得的球上标有的数字,求

(Ⅰ)(X,Y) 的联合分布律;

(Ⅱ)$\operatorname{cov}(X,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,y\leqslant x\leqslant y+1\}$ 上服从均匀分布,求

(Ⅰ)X 与 Y 的边缘概率密度函数;

(Ⅱ)并判断随机变量 X 与 Y 的独立性.

密 封 线 内 不 要 答 题