注意:
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点______________

________考场______号

归属区县______________

(领准考证的区县)

(密 封 线 内 不 要 答 题)

绝密★启用前

新浪教育联合跨考教育合办第二届
“十万人大联考”数学(一)试卷

(科目代码:301)

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	32	24	94	150
得分	______分	______分	______分	______分

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列命题正确的是 ( )

(A) 设 $a_n \leqslant b_n (n=1,2,\cdots)$,并设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收敛.

(B) 设 $|a_n| \leqslant b_n (n=1,2,\cdots)$,并设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 亦发散.

(C) 设 $a_n \leqslant |b_n| (n=1,2,\cdots)$,并设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 亦发散.

(D) 设 $|a_n| \leqslant |b_n| (n=1,2,\cdots)$,并设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收敛.

(2) 当 $x \to 0$ 时,下列 3 个无穷小

$$\alpha = \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}, \beta = \int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1)\mathrm{d}t, \gamma = \sqrt{1-x^4} - \sqrt[3]{1+3x^4},$$

按后面一个无穷小比前一个高阶的次序排列,正确的次序是 ( )

(A) α,β,γ. (B) γ,β,α.

(C) γ,α,β. (D) α,γ,β.

(3) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数(若下式中用到 $f'(x)$,则设 $f'(x)$ 存在),则以下 4 个结论中不正确的是 ( )

(A) $f'(x)$ 必以 T 为周期.

(B) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期.

(C) $\int_0^x [f(t) - f(-t)]\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期.

(D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期.

(4) 设 D 是由曲线 $y = x^3$ 与直线 $x = -\pi^{\frac{1}{4}}, y = \pi^{\frac{3}{4}}$ 所围成的有界闭区域,则

$$\iint\limits_D (y^2\cos(xy) + \sin(xy))\mathrm{d}\sigma =$$ ( )

(A) $-2\pi^{\frac{1}{4}}$. (B) $2\pi^{\frac{1}{4}}$.

(C) $-2\pi^{\frac{1}{2}}$. (D) $2\pi^{\frac{1}{2}}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$,若线性非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解,则其线性无关解向量个数是 ( )

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是三阶非零矩阵,满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{bmatrix}$,则 ( )

(A) $a=-1$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$. (B) $a\neq-1$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(C) $a=2$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$. (D) $a\neq 2$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(7) 设随机变量 X,Y 满足 $P\{XY\leqslant 0\}=\dfrac{3}{5}$,$P\{\max(X,Y)>0\}=\dfrac{4}{5}$,则 $P\{\min(X,Y)\leqslant 0\}$ ( )

(A) $\dfrac{1}{5}$. (B) $\dfrac{2}{5}$. (C) $\dfrac{3}{5}$. (D) $\dfrac{4}{5}$.

(8) 设随机变量 $X\sim U(0,2\pi)$,令 $U=\sin X$,$V=\cos X$,则 ( )

(A) U 与 V 不相关. (B) U 与 V 独立.

(C) U^2 与 V^2 不相关. (D) U^2 与 V^2 独立.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f''(a)$ 存在,$f'(a)\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f'(a)(x-a)}-\dfrac{1}{f(x)-f(a)}\right]=$ ________.

(10) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+xy+x^2-2x+1=0$ 确定并且满足 $y(1)=0$ 的函数,则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{\int_1^x y(x)\,\mathrm{d}x}=$ ________.

(11) 设 l 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=a\end{cases}$ $(a>0)$ 一周,则空间第一型曲线积分 $\int_l x^2\,\mathrm{d}s=$ ________.

(12) 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被锥面 $z=\sqrt{Ax^2+By^2}$ 截下的小的那部分,并设其中 A,B,R 均为正常数且 $A\neq B$,则第一型曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$,$f(x)=x^3-6x^2+11x-5$,则 $f(\boldsymbol{A})=$ ________.

(14) 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数和分布函数分别为 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$,令 $U=Y$,$V=2X$,则随机变量 (U,V) 的联合概率密度函数为 ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,证明:存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $\int_0^{\xi}f(t)\,\mathrm{d}t=(1-\xi)f(\xi)$.

若 $f(\xi)>0$ 且单调减少,则 ξ 是唯一的.

(16)(本题满分 10 分)

设 $f(x)=x\mathrm{e}^{2x}-2x-\cos x$,讨论它在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内零点的个数.

密 封 线 内 不 要 答 题

(17)（本题满分 10 分）

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，试证明：

（Ⅰ）$a_{n+1}<a_n$ 且 $\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$（当 $n\geqslant 2$）；

（Ⅱ）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

(18)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，且微分方程

$$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$$

为全微分方程.

（Ⅰ）求 $f(x)$；

（Ⅱ）该全微分方程的通解.

(19)（本题满分 10 分）

设 a 与 b 都是常数且 $b>a>0$.

（Ⅰ）试写出 yOz 平面上的圆 $(y-b)^2+z^2=a^2$ 绕 Oz 轴一圈生成的环面 S 的方程；

（Ⅱ）S 所围成的实心环的空间区域为 Ω，计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2dv$.

(20)（本题满分 11 分）

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=0\\2x_1-x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}\qquad(*)$$

添加一个方程 $ax_1+2x_2+bx_3-5x_4=0$ 后，成为方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=0\\2x_1-x_2+x_3+3x_4=0\\ax_1+2x_2+bx_3-5x_4=0\end{cases}\qquad(**)$$

（Ⅰ）求解（$*$）的通解；

（Ⅱ）a、b 满足什么条件时，（$*$）（$**$）是同解方程组.

(21)（本题满分 11 分）

$\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，对应两个线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\lambda_3=-2$ 对应的特征向量是 $\boldsymbol{\xi}_3$.

（Ⅰ）问 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 是否是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量？说明理由；

（Ⅱ）$\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$ 是否是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量？说明理由；

（Ⅲ）证明：任一三维非零向量 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$ 都是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量，并求对应的特征值.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=Ae^{-ax^2+bxy-cy^2},-\infty<x,y<+\infty.$$

（Ⅰ）a,b,c 满足什么条件时，X,Y 相互独立？

（Ⅱ）若 $a=\frac{1}{2},b=0,c=2$，求 $P\{Y\leqslant 1|X\leqslant 1\}$.

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

其中 μ 为未知参数，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本.

（Ⅰ）求未知参数 μ 的最大估计量 $\hat{\mu}$；

（Ⅱ）验证 $\hat{\mu}$ 为 μ 的无偏估计量.

密封线内不要答题