新浪教育联合跨考教育合办第二届“十万人大联考”数学(一)试卷(答案)

一、选择题

(1)【答案】 (B)

【分析】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 亦发散. 因若后者收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 又由 $|a_n| \leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$,故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数,且 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散,由比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,故应选(B).

其他(A),(C),(D)均可举出反例如下:

(A)的反例:$b_n=-\frac{1}{n^2}$,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,$a_n=-\frac{1}{n} \leqslant -\frac{1}{n^2}=b_n$,但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C)的反例:$a_n=\frac{1}{n}$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,$b_n=\frac{(-1)^n}{n}$,$a_n \leqslant |b_n|$,但 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 却收敛.

(D)的反例见(C)的反例.

(2)【答案】 (D)

【分析】
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^k(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{x^k\cos x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^k}.$$

所以当 $x\to 0$ 时,$\alpha\sim\frac{1}{4}x^3$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{x^h}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{x^h}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^4}-1)\cdot 2x}{h\,x^{h-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5}{h\,x^{h-1}}=\frac{2}{h}\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^h}.$$

所以当 $x\to 0$ 时,$\beta\sim\frac{1}{3}x^6$.

对于 γ,用佩亚诺余项泰勒展式展开最方便.

$$\gamma=\sqrt{1-x^4}-\sqrt[3]{1+3x^4}=1-\frac{1}{2}x^4+o_1(x^4)-\left[1+\frac{1}{3}(3x^4)+o_2(x^4)\right]$$
$$=-\frac{3}{2}x^4+o(x^4),$$

所以当 $x\to 0$ 时,$\gamma\sim-\frac{3}{2}x^4$. 综合之,从低到高排列应是 α,γ,β. 选(D).

(3)【答案】 (B)

【分析】 (B)的反例:$f(x)=\sin^2 x$,以 π 为周期,但

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \sin^2 t dt=\int_0^x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$$

不是周期函数,(B)不正确,选(B).

事实上,设 $f(x)$ 有周期 T,则 $\int_0^x f(t)dt$ 有周期 T 的充要条件是 $\int_0^T f(t)dt=0$. 证明如下:

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,有 $F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt$,

可见 $F(x+T)\equiv F(x)$ 的充要条件是 $\int_0^T f(t)dt=0$. 证毕. 以下说明(A),(C),(D)均正确.

由 $f(x+T)=f(x)$ 及 $f(x)$ 可导，有 $f'(x+T)=f'(x)$. 所以 $f'(x)$ 有周期 T，(A)正确. (C)中的被积函数是 t 的周期函数，由以上证明，$\int_0^x[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$ 以 T 为周期的充要条件是

$$\int_0^T[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t=0.$$

而该积分中的被积函数 $f(t)-f(-t)$ 是 t 的奇函数.

$$\int_0^T[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t=0$$

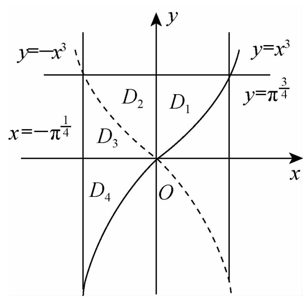
成立，所以(C)正确.

(D)中令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\dfrac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，有

$$\begin{aligned}F(x+T)-F(x)&=\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-\frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 以 T 为周期，(D)正确.

(4)**【答案】** (D)



【分析】 如图所示，作曲线 $y=-x^3$，连同 x 轴与 y 轴，将 D 分成 4 块，按逆时针方向，这 4 块分别记为 D_1,D_2,D_3 与 D_4.

$$\iint\limits_D[y^2\cos(xy)+\sin(xy)]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1\cup D_2}y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3\cup D_4}y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_1\cup D_2}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3\cup D_4}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma.$$

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{D_1\cup D_2}y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3\cup D_4}y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma\\=&2\iint\limits_{D_2}y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma+2\iint\limits_{D_3}y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_2\cup D_3}y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma\\=&2\int_0^{\pi^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}y\int_{-\pi^{\frac{1}{4}}}^0 y^2\cos(xy)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi^{\frac{3}{4}}}y\sin(\pi^{\frac{1}{4}}y)\mathrm{d}y=2\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

由奇偶性，$\iint\limits_{D_1\cup D_2}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma=0$，$\iint\limits_{D_3\cup D_4}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma=0$. 故应选(D).

(5)**【答案】** (C)

【分析】 $\boldsymbol{A}$ 是 3×3 矩阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，故 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A})=2r(\boldsymbol{A})\leqslant3$，得 $r(\boldsymbol{A})\leqslant\dfrac{3}{2}$，又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})\geqslant1$，从而知 $r(\boldsymbol{A})=1$. 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中线性无关解向量的个数为 $n-1=3-1=2$. 故非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的线性无关解向量的个数是 3 个，故应选(C).

【注】 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}$，则 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2$ 就是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个线性无关解向量.

(6)**【答案】** (C)

【分析】 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2a&1-a&2a\\a&-a&a^2-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&a+1&0\\0&0&a^2-a-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&a+1&0\\0&0&(a-2)(a+1)\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，$r(\boldsymbol{A})>0$.

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant3$，$r(\boldsymbol{A})>0$，故 $r(\boldsymbol{B})\leqslant2$.

当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=1$ 或 2，(A)不成立.

当 $a\neq-1$ 时，必有 $a=2$，$r(\boldsymbol{B})=2\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=1$，(B)不成立.

当 $a\neq 2$ 时,必有 $a=-1$,$r(\boldsymbol{B})=1\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=1$ 或 2.(D)不成立.

由排除法,故应选(C).或当 $a=2$ 时,$r(\boldsymbol{B})=2\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=1$,故应选(C).

(7)**【答案】** (D)

【分析】 $P\{XY\leqslant 0\}=\dfrac{3}{5}$,即 $P\{X\leqslant 0,Y\geqslant 0\}+P\{X\geqslant 0,Y\leqslant 0\}=\dfrac{3}{5}$,又

$P\{\max(X,Y)>0\}=1-P\{\max(X,Y)\leqslant 0\}=1-P\{X\leqslant 0,Y\leqslant 0\}=\dfrac{4}{5}$,即得

$$P\{X\leqslant 0,Y\leqslant 0\}=\frac{1}{5}.$$

因为 $P\{\min(X,Y)\leqslant 0\}=1-P\{\min(X,Y)>0\}=1-P\{X>0,Y>0\}$

$$=P\{X\leqslant 0,Y\geqslant 0\}+P\{X\geqslant 0,Y\leqslant 0\}+P\{X\leqslant 0,Y\leqslant 0\}=\frac{4}{5}.$$

(8)**【答案】** (A)

【分析】 $X\sim U(0,2\pi)$,于是 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<x<2\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$EX=E(\cos X)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x=0, EY=E(\sin X)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=0,$$

$$E(UV)=E(\cos X\cdot\sin X)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\cdot\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{2\pi}=0,$$

于是 $\operatorname{cov}(U,V)=E(UV)-EU\cdot EV=0$. 所以随机变量 U,V 不相关,不相互独立.

$P\{U^2+V^2=1\}=P\{(\sin X)^2+(\cos X)^2=1\}=1$,于是 U^2 与 V^2 不是不相关,且 U^2 与 V^2 不独立.

二、填空题

(9)**【答案】** $\dfrac{f''(a)}{2(f'(a))^2}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f'(a)(x-a)}-\dfrac{1}{f(x)-f(a)}\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)[f(x)-f(a)]}$.

可以用以下两种方法计算.

法一 将分子用皮亚诺余项泰勒公式展开至 $o((x-a)^2)$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+o((x-a)^2)}{f'(a)(x-a)[f(x)-f(a)]}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2}f''(a)+\frac{o((x-a)^2)}{(x-a)^2}}{f'(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}=\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.$$

法二 用洛必达法则.

$$\text{原式}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{f'(a)[f(x)-f(a)+(x-a)f'(x)]}\xlongequal{【注】}\lim_{x\to a}\frac{\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}}{f'(a)\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f'(x)\right]}$$

$$=\frac{f''(a)}{2(f'(a))^2}.$$

【注】 此等号不能用洛必达法则,而只能凑成二阶导数的定义去做.

(10)**【答案】** -3

【分析】 $$\text{原式}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{y(x)}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 1}\frac{6(x-1)}{y'(x)}.$$

由隐函数求导,有 $3y^2y'+xy'+y+2x-2=0$,得

$$y'(x)=-\frac{y+2x-2}{3y^2+x}, \text{有}\lim_{x\to 1}y'(x)=0.$$

再用洛必达法则,

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{6}{y''(x)}.$$

而 $$y''(x)=-\frac{(3y^2+x)(y'+2)-(y+2x-2)(6yy'+1)}{(3y^2+x)^2},\lim_{x\to1}y''(x)=-2.$$

所以原式$=-3$.

(11)**【答案】** $\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi a^3$

【分析】 由轮换对称性知，$\int_l x^2\mathrm{d}s=\int_l y^2\mathrm{d}s=\int_l z^2\mathrm{d}s$，

所以 $\int_l x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_l(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_l a^2\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_l\mathrm{d}s$，

而 $\int_l\mathrm{d}s$ 为 l 的全长，l 是平面 $x+y+z=a$ 上的圆周，点 O 到此平面的距离为 $d=\frac{a}{\sqrt{3}}$，所以此 l 的半径为 $R=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，

所以 $\int_l\mathrm{d}s=2\pi R=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a$，$\int_l x^2\mathrm{d}s=\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi a^3$.

(12)**【答案】** $\frac{\pi R^3}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}$

【分析】 球面与锥面的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程为

$$(A+1)x^2+(B+1)y^2=R^2.$$

则 $D=\{(x,y)\mid(A+1)x^2+(B+1)y^2\leqslant R^2\}$. 球面方程(上部)为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}^2\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma,\iint_S z\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D R\,\mathrm{d}\sigma=R\cdot D\text{ 的面积}.$$

D 是个椭圆，D 的面积$=\frac{\pi R^2}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}$，所以 $\iint_S z\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi R^3}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}$.

(13)**【答案】** $\boldsymbol{E}$

因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，可知存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^3-6(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^2+11\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}-5\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^3-6\boldsymbol{\Lambda}^2+11\boldsymbol{\Lambda}-5\boldsymbol{E})P^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\left(\begin{bmatrix}1&&\\&8&\\&&27\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&&\\&4&\\&&9\end{bmatrix}+11\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1-6+11-5&&\\&8-24+22-5&\\&&27-54+33-5\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PEP}^{-1}=\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

(14)**【答案】** $\frac{1}{2}f(x,y)$

【分析】 设 (U,V) 的联合分布函数为

$$G(x,y)=P\{U\leqslant x,V\leqslant y\}=P\{Y\leqslant x,2X\leqslant y\}=P\left\{X\leqslant\frac{y}{2},Y\leqslant x\right\}=F\left(\frac{y}{2},x\right),$$

则 (U,V) 的联合概率密度函数为 $\frac{\partial^2G(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}f(x,y)$.

三、解答题

(15)【证】 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,即去证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)-(1-\xi)F'(\xi)=0$. 将 ξ 改为 x,即去证方程 $F(x)-(1-x)F'(x)=0$ 在(0,1)内存在根.

作函数(此种作函数的方法称微分方程法)

$$\varphi(x)=(1-x)F(x),$$

有 $\varphi(0)=F(0)=0,\varphi(1)=0$,由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$,即

$$-F(\xi)+(1-\xi)F'(\xi)=0.$$

证明了 $\xi\in(0,1)$的存在性. 再设 $f(x)>0$,去证这种 ξ 是唯一的.

设存在 $\xi\in(0,1)$及 $\eta\in(0,1)$,不妨设 $\xi>\eta$,使

$$\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t=(1-\xi)f(\xi),\int_0^\eta f(t)\mathrm{d}t=(1-\eta)f(\eta),$$

两式相减,由 $f(x)$单调减少及 $f(x)>0$,得

$$\int_\eta^\xi f(t)\mathrm{d}t=(1-\xi)f(\xi)-(1-\eta)f(\eta)=(1-\eta)[f(\xi)-f(\eta)]+(\eta-\xi)f(\xi)<0.$$

但左边 $\int_\eta^\xi f(t)\mathrm{d}t>0$. 这是一个矛盾. 这就证明了 $\xi\in(0,1)$是唯一的. 证毕.

(16)【解】 $f(-1)=-\mathrm{e}^{-2}+2-\cos 1>0,f(0)=-1<0,f(1)=\mathrm{e}^2-2-\cos 1>0$,

所以在区间(−1,0)与区间(0,1)内分别至少有1个零点.

$$f'(x)=\mathrm{e}^{2x}+2x\mathrm{e}^{2x}-2+\sin x=2x\mathrm{e}^{2x}+(\mathrm{e}^{2x}-1)+(\sin x-1),$$

所以当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$,所以在区间$(-\infty,-1]$内 $f(x)$无零点,在区间(−1,0)内有1个零点.

$$f''(x)=4\mathrm{e}^{2x}+4x\mathrm{e}^{2x}+\cos x=4(1+x)\mathrm{e}^{2x}+\cos x=(4\mathrm{e}^{2x}+\cos x)+4x\mathrm{e}^{2x}.$$

可见无论 $x\in(-1,0)$还是 $x\in[0,+\infty)$,$f''(x)>0$. 所以在区间$(-1,+\infty)$内 $f(x)$至多有2个零点,而前已证明 $f(x)$在区间(−1,1)内至少有2个零点,所以 $f(x)$仅有2个零点,分别在区间(−1,0)与(0,1)内.

【注】本题的 $f(x)$是个具体函数,但讨论很有技巧,十分耐人寻味.

(17)【解】 (Ⅰ)因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$时,$0\leqslant\tan x\leqslant 1$,且仅在两处 $x=0$ 与 $x=\frac{\pi}{4}$ 等号成立,所以

$$a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=a_n(n=1,2,\cdots).$$

又 $a_{n+2}+a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2x+1)\tan^nx\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\tan^nx\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nx\mathrm{d}\tan x$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1},$$

又因 $a_n>a_{n+2}$,所以 $2a_n>a_n+a_{n+2}$,从而 $a_n>\frac{1}{2(n+1)}$.

因 $2a_{n+2}<a_n+a_{n+2}$,从而 $a_{n+2}<\frac{1}{2(n+1)}$,于是 $a_n<\frac{1}{2(n-1)}(n=2,3,\cdots)$.

(Ⅰ)证毕.

(Ⅱ)由(Ⅰ)有$|(-1)^na_n|>\frac{1}{2(n+1)}$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^na_n|$发散. 且 $a_{n+1}<a_n$,并由已证$\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$,知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 所以由莱布尼茨定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 条件收敛.

(18)【解】 (Ⅰ)由$\frac{\partial}{\partial y}[xy(x+y)-f(x)y]=\frac{\partial}{\partial x}[f'(x)+x^2y]$,即

求得满足 $f(0)=0,f'(0)=1$ 的特解为 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$.

(Ⅱ)求全微分方程$[xy^2-(2\cos x+\sin x)y+2y]\mathrm{d}x+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)\mathrm{d}y=0$ 的通解,

关键是求原函数.

法一 凑原函数法.

$$[xy^2-(2\cos x+\sin x)y+2y]\mathrm{d}x+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)\mathrm{d}y$$
$$=xy(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+(-2\sin x+\cos x)\mathrm{d}y+y\mathrm{d}(-2\sin x+\cos x)+2(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)$$
$$=\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(xy)^2+(-2\sin x+\cos x)y+2xy\right].$$

所以该全微分方程的通解为$\frac{1}{2}(xy)^2+(-2\sin x+\cos x)y+2xy=C$.

法二 折线法. $u(x,y)=\int_0^x 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^y(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)\mathrm{d}y$

$$=(-2\sin x+\cos x)y+2xy+\frac{1}{2}x^2y^2.$$ 通解同上.

(19)**【解】** (Ⅰ)用$\sqrt{x^2+y^2}$替代$(y-b)^2+z^2=a^2$ 中的 y,便得 S 的直角坐标方程

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2=a^2.$$

(Ⅱ)用柱面坐标,按先 z 再 r 后 θ 的次序,

$$\iiint_\Omega(x+y)^2\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{b-a}^{b+a}\mathrm{d}r\int_{z_1}^{z_2}r^3(\cos\theta+\sin\theta)^2\mathrm{d}z,$$

其中 $z_1=-\sqrt{a^2-(r-b)^2}$, $z_2=\sqrt{a^2-(r-b)^2}$,

$$\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi,$$
$$\iiint_\Omega(x+y)^2\mathrm{d}v=4\pi\int_{b-a}^{b+a}r^3\sqrt{a^2-(r-b)^2}\mathrm{d}r.$$

作积分变量替换:$t=r-b$,得

$$\iiint_\Omega(x+y)^2\mathrm{d}v=4\pi\int_{-a}^{a}(b+t)^3\sqrt{a^2-t^2}\mathrm{d}t=8\pi\int_0^a(b^3+3bt^2)\sqrt{a^2-t^2}\mathrm{d}t.$$

再命 $t=a\sin u$,从而

$$\iiint_\Omega(x+y)^2\mathrm{d}v=8\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b^3+3a^2b\sin^2u)\cos^2u\mathrm{d}u$$
$$=8\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b^3\cos^2u+3a^2b\cos^2u-3a^2b\cos^4u)\mathrm{d}u$$
$$=8\pi a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}b^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot3a^2b-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot3a^2b\right)$$
$$=2\pi^2a^2b\left(b^2+\frac{3}{4}a^2\right).$$

(20)**【解】** (Ⅰ)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3&5\\1&-1&-2&2\\2&-1&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&5\\0&-1&-5&-3\\0&-1&-5&-7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&5\\0&-1&-5&-3\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$,

得方程组(*)的通解为 $k(-3,-5,1,0)^{\mathrm{T}}$,$k$ 是任意常数.

(Ⅱ)**法一** 方程组(*)、(**)是同解方程⇔方程组(*)的通解满足方程组(**)的第4个方程,代入得

$$-3ka+(-5k)\cdot2+bk+0=0,$$

即 $(-3a+b)k=10k$,因 k 是任意常数. 故得 $-3a+b=10$.

法二 方程组(*)、(**)是同解方程组,则方程组(**)中新添方程应可由原方程的三个方程线性表出,即新添方程是多余方程.

$$\begin{bmatrix}a\\2\\b\\-5\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\\5\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\3\end{bmatrix}$$ 有解.

将方程的增广矩阵进行初等行变换得

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&a\\0&-1&-1&2\\3&-2&1&b\\5&2&3&-5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&a\\0&-1&-1&2\\0&-5&-5&b-3a\\0&-3&-7&-5-5a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&a\\0&-1&-1&2\\0&0&-4&-5a-11\\0&0&0&b-3a-10\end{array}\right]$$

故(*)和(**)同解$\Leftrightarrow b-3a=10$.

(21)**【解】** (Ⅰ)$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量.

因已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=2\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=2\boldsymbol{\xi}_2$,故

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=2\boldsymbol{\xi}_1+2\boldsymbol{\xi}_2=2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2).$$

(Ⅱ)$\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.假设是,设其对应的特征值为 μ,则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=\mu(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3),$$

得 $$2\boldsymbol{\xi}_2-2\boldsymbol{\xi}_3-\mu\boldsymbol{\xi}_2-\mu\boldsymbol{\xi}_3=(2-\mu)\boldsymbol{\xi}_2-(2+\mu)\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0},$$

因 $2-\mu$ 和 $2+\mu$ 不同时为零,故 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性相关,这和不同特征值对应的特征向量线性无关矛盾,故 $\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(Ⅲ)因 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-2$,故 $\boldsymbol{A}^2$ 有特征值 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=4$.对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,且 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.故存在可逆阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=4\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}(4\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}=4\boldsymbol{E},$$

从而有对任意的 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$,有 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=4\boldsymbol{E}\boldsymbol{\beta}=4\boldsymbol{\beta}$,故知任意非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都是 $\boldsymbol{A}^2$ 的对应于 $\lambda=4$ 的特征向量.

(22)**【解】** (Ⅰ)若 X,Y 相互独立,则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,事实上

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=A\mathrm{e}^{-ax^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-cy^2+bxy}\mathrm{d}y\\&=A\mathrm{e}^{-ax^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{b^2x^2}{4c}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-cy^2+bxy-\left(\frac{b^2x^2}{4c}\right)}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sqrt{c}}A\mathrm{e}^{-ax^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{b^2x^2}{4c}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{c}y-\frac{bx}{2\sqrt{c}}\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{c}y-\frac{bx}{2\sqrt{c}}\right)\\&=A\sqrt{\frac{\pi}{c}}\mathrm{e}^{-\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)x^2},-\infty<x<+\infty.\end{aligned}$$

同理可得

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=A\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)y^2},-\infty<y<+\infty.$$

于是

$$A\mathrm{e}^{-ax^2+bxy-cy^2}=A\sqrt{\frac{\pi}{c}}\mathrm{e}^{-\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)x^2}A\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)y^2},-\infty<x,y<+\infty,$$

对比等式两边得 $b=0,\sqrt{ac}=A\pi$.

(Ⅱ)若 $a=\dfrac{1}{2},b=0,c=2$,则 X,Y 相互独立且 $A=\dfrac{1}{\pi}$,于是

$$P\{Y\leqslant1\mid X\leqslant1\}=P\{Y\leqslant1\}.$$

事实上,$Y\sim N\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$,所以 $P\{Y\leqslant1\mid X\leqslant1\}=P\{Y\leqslant1\}=\Phi(2)$.

(23)**【解】** (Ⅰ)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值,当 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 时,似然函数为

$$L(\mu)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\cdot(x_1x_2\cdots x_n)}\mathrm{e}^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2}},$$

两边同时取对数得 $\ln L(\mu)=-\dfrac{n}{2}\ln 2\pi-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2}$,令 $\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\mu)]}{\mathrm{d}\mu}=0$,解得 μ 的

最大似然估计值为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

所以 μ 的最大似然估计量为 $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$.

(Ⅱ) $E\hat{\mu}=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i)$,事实上 $E(\ln X_i)=E(\ln X)$,

$$E(\ln X)=\int_0^{+\infty}\ln x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

令 $\ln x=t$,于是

$$\begin{aligned}E(\ln X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\mu)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}}\mathrm{d}t+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}}\mathrm{d}t\\&=\mu.\end{aligned}$$

所以 $E\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\mu$,$\hat{\mu}$ 为 μ 的无偏估计量.